

矩阵的乘法



CONTENTS

情景导入

矩阵乘法定义

矩阵乘法规律

应用举例

知识小结

课后思考

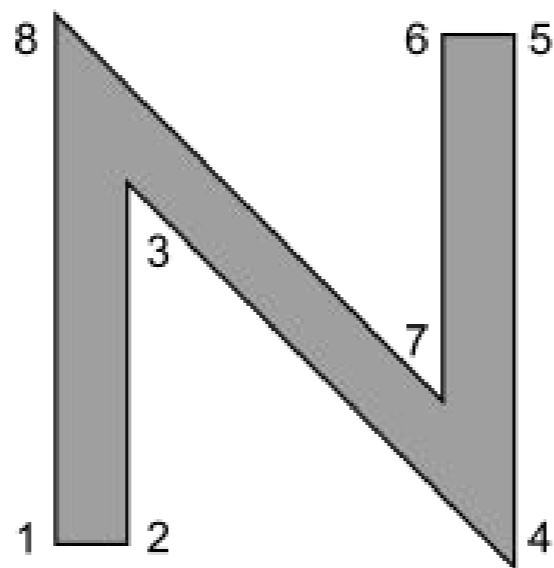


图1

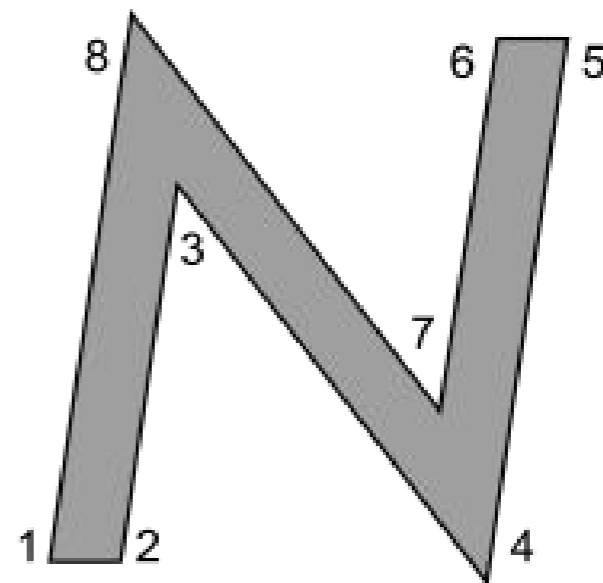
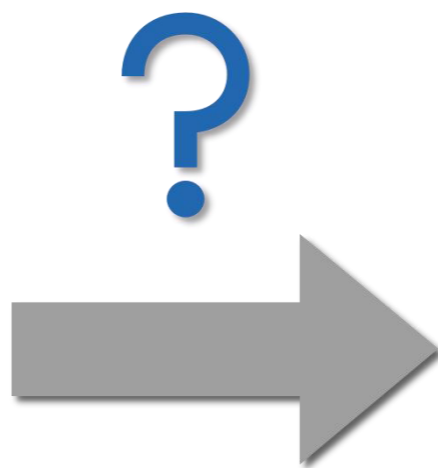


图2

你知道图2是通过什么样的**数学方法**实现的吗？

CONTENTS

情景导入

矩阵乘法定义

矩阵乘法规律

应用举例

知识小结

课后思考

引例 某工厂生产四种货物，它向三家商店发送的货物数量用数表 (a_{ij}) 表示，四种货物单价及单件重量用数表 (b_{ij}) 表示。

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{array}$$

其中 a_{ij} 表示工厂向第 i 家商店发送第 j 种货物的数量。

$$\begin{array}{cc} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{array}$$

其中 b_{i1} 表示第 i 种货物的单价， b_{i2} 表示第 i 种货物的单件重量。

试求： 工厂向三家商店所发货物的总值及总重量。

矩阵乘法定义

解:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{matrix}$$

其中 a_{ij} 表示工厂向第 i 家商店发送第 j 种货物的数量.

$$\begin{matrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{matrix}$$

其中 b_{i1} 表示第 i 种货物的单价,
 b_{i2} 表示第 i 种货物的单件重量.

以 c_{i1}, c_{i2} 分别表示工厂向第 i 家商店所发货物的总值及总重量, 其中 $i = 1, 2, 3$. 于是

$$\begin{aligned} c_{11} &= \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \times & + & \times & + & \times & + & \times \\ b_{11} & b_{21} & b_{31} & b_{41} \end{matrix} = \sum_{k=1}^4 a_{1k} b_{k1} \\ c_{12} &= a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} + a_{13} b_{32} + a_{14} b_{42} = \sum_{k=1}^4 a_{1k} b_{k2} \end{aligned}$$

矩阵乘法定义

一般地,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + a_{i4}b_{4j} = \sum_{k=1}^4 a_{ik}b_{kj}$$
$$(i = 1, 2, 3; j = 1, 2)$$

可用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix}$$

矩阵乘法

定义 设 $A = (a_{ij})_{m \times s}$, $B = (b_{ij})_{s \times n}$, 则 A 和 B 的乘积记作 $C = AB = (c_{ij})_{m \times n}$. 其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj} \quad (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{is} \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix}_{m \times s} \begin{pmatrix} * & b_{1j} & * \\ * & b_{2j} & * \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ * & b_{sj} & * \end{pmatrix}_{s \times n} = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ * & * & c_{ij} & * \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix}_{m \times n}$$

矩阵乘法定义

例1 计算下列矩阵的乘积:

$$XY = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{不能相乘!}$$

$$AB = (1 \quad 2 \quad 3) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 \times 3 + 2 \times 2 + 3 \times 1) = (10) = 10$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \quad 2 \quad 3) = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

矩阵乘法定义

例1 计算下列矩阵的乘积:

$$XY = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{不能相乘!}$$

$$AB = (1 \quad 2 \quad 3) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 \times 3 + 2 \times 2 + 3 \times 1) = (10) = 10$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \quad 2 \quad 3) = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

矩阵乘法定义

例1 计算下列矩阵的乘积:

$$XY = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{不能相乘!}$$

$$AB = (1 \quad 2 \quad 3) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 \times 3 + 2 \times 2 + 3 \times 1) = (10) = 10$$

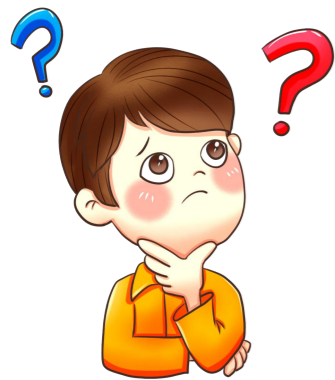
$$BA = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} (\boxed{1} \quad \boxed{2} \quad \boxed{3}) = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

矩阵乘法定义

练习 设 $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$, 求 AB 和 BA .

解:
$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} -16 & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}_{2 \times 2} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$



你发现**矩阵乘法**与**实数乘法**的区别了吗?

CONTENTS

情景导入

矩阵乘法定义

矩阵乘法规律

应用举例

知识小结

课后思考

结论1 矩阵乘法中，一般 $AB \neq BA$.

矩阵的乘法不满足交换律，并不等说对于任意的两个矩阵 A 和 B ，必有 $AB \neq BA$. 你能举出 $AB = BA$ 的例子吗？

结论2 矩阵 $A \neq O$, $B \neq O$, 却有 $AB = O$. 因此 $AB = O$ 不能得出 $A = O$ 或 $B = O$ 的结论.

结论3 若 $A \neq O$, 由 $AB = AC$, 不能得出 $B = C$ 的结论.

矩阵乘法规律

矩阵乘法满足以下规律：



(1) 乘法结合律 $(AB)C = A(BC)$



(2) 数乘和乘法的结合律 $\lambda(AB) = (\lambda A)B$ (其中 λ 是数)



(3) 乘法对加法的分配律

$$A(B + C) = AB + AC \quad (B + C)A = BA + CA$$



(4) 单位矩阵在矩阵乘法中的作用类似于数1，即

$$E_m A_{m \times n} = A_{m \times n} E_n = A$$

CONTENTS

情景导入

矩阵乘法定义

矩阵乘法规律

应用举例

知识小结

课后思考

斜体字的实现

将图1中大写字母 N 的8个点(或顶点)坐标存储在数字矩阵 D 中.

$$\begin{matrix} x\text{坐标} \\ y\text{坐标} \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 6 & 6 & 5.5 & 5.5 & 0 \\ 0 & 0 & 6.42 & 0 & 8 & 8 & 1.58 & 8 \end{pmatrix} = D$$

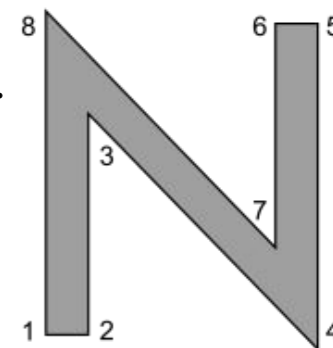


图1

给定矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0.25 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$AD = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 2.105 & 6 & 8 & 7.5 & 5.895 & 2 \\ 0 & 0 & 6.420 & 0 & 8 & 8 & 1.580 & 8 \end{pmatrix} = D'$$

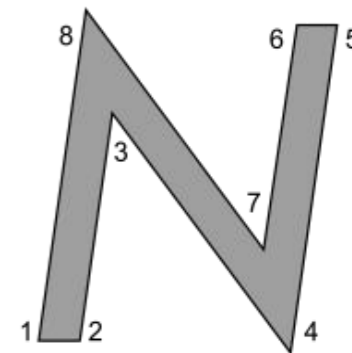


图2

▼▲ 细体字的实现 ▲▼

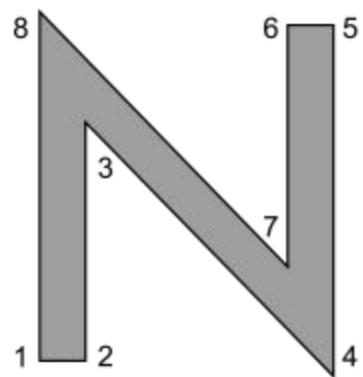


图1

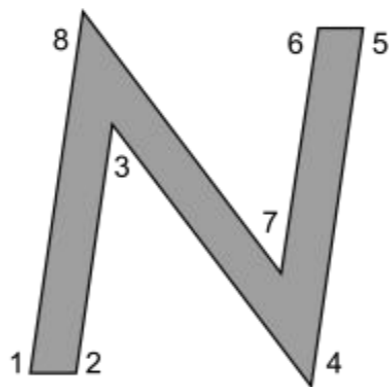
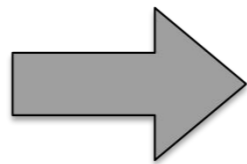


图2

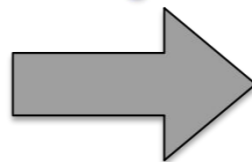


图3

拓展：将图2中 x 坐标乘以一个因子0.75，你能写出图1变换到图3的复合变换矩阵吗？

CONTENTS

情景导入

矩阵乘法定义

矩阵乘法规律

应用举例

知识小结

课后思考

知识小结

1. 矩阵乘法: $C_{m \times n} = A_{m \times s} B_{s \times n}$

矩阵 C 的元素 $c_{ij} = \sum_{k=1}^s a_{ik} b_{kj} (i=1,2,\dots,n; j=1,2,\dots,m.)$

2. 矩阵乘法规律

$$(AB)C = A(BC)$$

(1) 一般 $AB \neq BA$

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B$$

(2) $AB = O \Rightarrow A=O$ 或 $B=O$

$$(A+B)C = AC + BC$$

(3) $A \neq O, AB = AC \Rightarrow B=C$

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$E_m A_{m \times n} = A_{m \times n} E_n = A$$

CONTENTS

情景导入

矩阵乘法定义

矩阵乘法规律

应用举例

知识小结

课后思考

课后思考

天气的马尔可夫 (Markov) 链

假设某市天气分为三种状态：晴、阴和雨，通过一定时间的观察天气的变化趋势确定了转移矩阵 P .



$$P = \begin{array}{c} \text{明天} \\ \text{晴} \\ \text{阴} \\ \text{雨} \end{array} \begin{array}{c} \text{今天} \\ \text{晴} \\ \text{阴} \\ \text{雨} \end{array} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

若已知 p_1, p_2, p_3 分别为今天是晴、是阴、是雨的概率，请你预测明天和后天的天气概率.